L'Istituto Italiano di GeoGebra a Torino: Ricerca, formazione docenti, sperimentazione didattica

Ornella Robutti,
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Via Carlo Alberto 10, Torino
ornella.robutti@unito.it

La diffusione recente del software di geometria dinamica GeoGebra apre il campo a questioni di ricerca didattica e pedagogica, di formazione insegnanti, di sperimentazione e uso nelle classi. La chiave di volta è il cambiamento che si può instaurare nell'insegnamento della geometria e della matematica in generale usando questo tipo di tecnologia e facendo leva su metodologie didattiche di collaborazione, lavoro di gruppo, scoperta e congettura. In questo articolo si descrivono attività inserite in progetti di sperimentazione che, utilizzando le caratteristiche del software, presentano una didattica della matematica laboratoriale ed esplorativa. Tali attività sono inserite nei progetti sviluppati dall'Istituto di GeoGebra di Torino fondato lo scorso anno.

1. Introduzione

Nel luglio 2010 è stato fondato a Torino l'Istituto Italiano di GeoGebra (http://www.geogebra.unito.it/), ospitato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino (www.dm.unito.it) ed operante con l'associazione La Casa degli Insegnanti (http://www.lacasadegliinsegnanti.it/PORTALE/).
L'Istituto di Torino condivide con l'International GeoGebra Institute (http://www.geogebra.org/igi/) le seguenti finalità:

1. Formazione e supporto: coordinare e fornire opportunità di sviluppo professionale sia nella formazione iniziale, sia in quella in servizio dei docenti;
2. Sviluppo e condivisione: sviluppare e condividere le risorse di seminari e materiali didattici, incrementare ed estendere continuamente il software matematico dinamico GeoGebra;
3. Ricerca e collaborazione: condurre e sostenere ricerche relative a GeoGebra con l'attenzione all'insegnamento e all'apprendimento della matematica, informare ed incrementare le attività di formazione e sviluppo, promuovere la collaborazione tra l'IGI e gli Istituti locali di GeoGebra, ed infine tra colleghi di diversi Paesi.

Il GeoGebra Institute di Torino può rilasciare agli insegnanti certificazioni secondo tre livelli: *utenti, esperti, formatori,* in base ai parametri fissati dall'IGI.

DIDAMATICA 2011 – ISBN 9788890540622

Il GeoGebra Institute di Torino, per la condivisione e la diffusione di informazioni e materiali, utilizza, oltre agli spazi ufficiali di GeoGebra, anche i seguenti:

- la piattaforma DI.FI.MA. (DIdattica della FIsica e della Matematica: http://teachingdm.unito.it/porteaperte);
- la piattaforma de La Casa degli Insegnanti per i docenti che partecipano ai progetti di formazione e sperimentazione.

2. Il software GeoGebra

GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/) è un software di geometria dinamica con cui gli studenti possono costruire figure attraverso l'uso di comandi che permettono di collocare oggetti geometrici (punti, rette, segmenti, poligoni, cerchi, ecc.) su un piano. La caratteristica peculiare di GeoGebra, analoga a quelli degli altri software di geometria dinamica diffusi in precedenza (Cabri-Géomètre in area europea, The Geometer Sketchpad in area nord-americana), è la dinamicità. Le figure costruite possono infatti essere manipolate dinamicamente, non solo trascinate nel piano, ma anche modificate (nel senso di allargate, ristrette e quant'altro), mantenendone però invariato il protocollo di costruzione. Ovvero, se si è costruito un quadrato, pur modificandolo si vedrà sempre un quadrato, seppur girato o ingrandito, che mantiene le stesse proprietà con cui è stato costruito.

GeoGebra però si colloca su un piano diverso rispetto agli altri software menzionati, in quanto è gratuito: infatti è un software open-source che si sta diffondendo sempre di più oggigiorno nel mondo. Si tratta di una di quelle *infrastrutture rappresentazionali* (Hegedus & Moreno-Armella, 2009), che si diffondono a macchia d'olio nelle scuole di ogni livello e di ogni Paese, nei centri di formazione per insegnanti, nelle Università, nei centri di ricerca, nei progetti internazionali di ricerca didattica, per la loro facilità d'uso, il loro libero accesso (e modifica e implementazione), diventando in pochi anni pervasivi nel mondo dell'educazione. Certamente non lo si deve solo alle caratteristiche d'uso (*affordances*, secondo Hegedus e Moreno-Armella, 2009) finalizzate all'utente, ma anche al fatto che il terreno preparato in tanti anni dalla diffusione dei software proprietari (Cabri, Sketchpad) sopra citati ha determinato un'accoglienza unanime da parte del mondo della scuola e dell'Università. C'è da menzionare anche il fatto che GeoGebra cerca di andare oltre, nelle *affordances*, rispetto ai software che lo hanno preceduto. Infatti, consente non solo la costruzione e la manipolazione di figure geometriche nel piano euclideo e in quello cartesiano, ma anche una buona gestione simbolica degli oggetti geometrici e l'integrazione con l'ambiente numerico (simile a quello di un foglio elettronico). Per finire, i file costruiti in GeoGebra possono essere caricati sul web come applet dinamici interattivi e consentire alla comunità di utilizzarli e manipolarli pur senza aprire GeoGebra.

In pochi anni, da quando fu creato dal suo ideatore, uno studente austriaco, Markus Hohenwarter, che faceva la sua tesi di laurea, GeoGebra si è diffuso in tutto il mondo e oggi può vantare la traduzione in decine e decine di lingue diverse e un uso su tutti i continenti, a qualunque livello scolare (Hohenwarter et al., 2009).

Mi piace paragonare GeoGebra all’enciclopedia libera Wikipedia (avviata nel 2001 da Jimmy Wales) e fare alcune osservazioni sull’affidabilità di questa enciclopedia libera, gratuita, scritta e revisionata dalla comunità mondiale di utenti e navigatori del web. Quando qualcuno ha messo in dubbio in passato l’affidabilità di Wikipedia rispetto alla ben nota affidabilità dell’Enciclopedia Britannica (fondata nel 1768), storico e plurisecolare riferimento del sapere accademico, la rivista Nature ha contrapposto uno studio quantitativo volto ad analizzare gli errori presenti nelle due, a parità di voci. I risultati sono stati sorprendenti, e hanno rivelato che il livello di accuratezza ed esattezza dei contenuti di Wikipedia è paragonabile a quello della Britannica, cui è inferiore più che altro in termini di correttezza e coerenza stilistica e strutturale. Questo studio comparativo ha rafforzato l’idea di base di Wikipedia e, più in generale, il principio cardine che la libertà e la cooperazione in rete non generano caos, ma una forza culturale e creatrice nuova e tipica delle comunità di pratica che si stabiliscono spontaneamente (Wenger, 1998).

Il processo di costruzione e verifica collettiva della conoscenza rende l’avventura di Wikipedia molto simile a quella GeoGebra, il software che si avvale, dopo la sua nascita, della competenza di ricercatori e programmatori di tutto il mondo per evolvere e fornire non solo sempre nuove possibilità di uso agli utenti, ma anche nuove implementazioni su supporti diversi (è infatti allo studio l’implementazione di GeoGebra come applicazione per *smartphone* e tecnologie portatili). Pur essendo software nati in un mondo sempre più consumistico, sia per Wikipedia, sia per GeoGebra, la molla non è stato il profitto, ma in entrambi si sono sfruttate con successo le idee di: comunità di utenti e sviluppatori, rete per l’aggiornamento e crescita del prodotto. Per entrambi, la cooperazione ampia e gratuita delle intelligenze della comunità ha dato risultati di eccellenza, diminuendo l’entropia, anziché aumentarla come succede nei fenomeni naturali. In tal modo, la pervasività ampia e spontanea, ottenuta tramite la traduzione e l’utilizzazione in decine di Paesi di tutto il mondo, ha realizzato quella democratizzazione della conoscenza tanto auspicata dallo scomparso Jim Kaput (Kaput & Roschelle, 1997).

3. La ricerca didattica con i software di geometria dinamica

Iniziata una ventina di anni fa, la ricerca internazionale in didattica della matematica con i software di geometria dinamica, oggi continua includendo anche GeoGebra, ed utilizzando filoni già consolidati e altri più nuovi. Possiamo identificare alcune grandi linee di ricerca didattica che toccano la matematica (anche se i software di geometria dinamica vengono utilizzati non solo in matematica, ma in fisica, nelle scienze sperimentali, in economia, in geografia, …). Tali linee di ricerca che qui presento sono identificate sulla base delle *affordances* che i software presentano:

- la dinamicità, ottenuta tramite la funzione di trascinamento (*dragging*);
- la misura (di lunghezze di segmenti, di ampiezze di angoli, di aree di figure, …);
- la traccia, il luogo, l’animazione (che consentono di vedere l’evoluzione di modelli);

- l'integrazione di registri di rappresentazione diversi (come quello geometrico e quello analitico), che consente di modellizzare situazioni problematiche.

L'oggetto matematico che gli studenti utilizzano in un software di geometrica dinamica può essere da loro visto in due modi diversi: come semplice figura (ossia facendo leva sugli aspetti percettivi di osservazione) oppure come figura legata a una teoria (cioè facendo leva sugli aspetti concettuali). Questa base teorica, formulata nell'ambito della psicologia da Fishbein (1993), ha permeato la ricerca sull'apprendimento della matematica, con e senza software (Laborde, 2004). Con il software si fa anche più pressante l'attenzione sugli studenti, in quanto la loro tentazione a fermarsi ai soli aspetti percettivi della figura è forte, perché il software offre non solo il disegno, ma anche una molteplicità di disegni ottenibili con il trascinamento. Se vogliamo quindi far passare pensiero teorico, avviando alla dimostrazione (che la base della struttura teorica della matematica), occorre agire nell'insegnamento con grande attenzione e sensibilità didattica (Marrades & Gutierrez, 2000; Olivero, Paola, & Robutti, 2001).

La chiave di volta per un cambiamento nell'insegnamento della matematica con l'uso dei software di geometria dinamica è di tipo metodologico, ed è documentata da risultati di ricerca che garantiscono efficacia sia nei processi di insegnamento, sia in quelli di apprendimento (Noss et al., 1997; Laborde et al., 2006). Tale cambiamento si realizza non già proponendo con l'uso del software problemi e attività in forma tradizionale, bensì formulando i compiti in modo del tutto nuovo. A seconda del tipo di problema, si possono identificare nei risultati di ricerca queste proposte di cambiamento:

- problema di costruzione: classico problema di geometria risalente agli antichi greci, che consiste nel costruire figure geometriche utilizzando riga e compasso, quindi basando la costruzione su proprietà e assiomi della geometria euclidea. Un software come GeoGebra può essere utilizzato in sostituzione della riga e del compasso, purché gli studenti siano consapevoli che non è sufficiente ottenere la figura richiesta, ma che questa figura, una volta trascinata (e qui entra in gioco il *dragging*), mantenga le stesse caratteristiche (cioè, per esempio, un quadrato continui ad essere un quadrato e non diventi un quadrilatero qualunque). Tale problema di costruzione può essere seguito dalla richiesta di spiegare perché la costruzione è stata fatta in un certo modo, e quindi giustificarla utilizzando la teoria (si entra qui nel mondo della dimostrazione). Esempio di problema di costruzione può essere il seguente: "Costruire la circonferenza che passa per il punto P ed è tangente alla retta l nel punto Q. Spiegare perché la figura ottenuta è proprio la circonferenza richiesta".
- Problema di esplorazione: può essere il classico problema di dimostrazione, in cui però non viene richiesto un compito del tipo "dimostra che…", di fronte a cui la maggior parte di studenti pensa che sia necessario un lampo di genio per riuscire a trovare la dimostrazione e così rimane bloccata. Ma si tratta di un problema formulato in modo aperto, che lascia la possibilità di esplorare una situazione geometrica, di formulare una congettura, di validarla e quindi, di dimostrarla, una volta convenuto che non è sufficiente

vedere con il software che una certa tesi funziona, ma che bisogna giustificarla nel sistema teorico. La potenzialità dei problemi aperti è che essi favoriscono una vasta produzione matematica, nel senso che tutti gli studenti riescono a trovare soluzioni, più o meno complesse, relative alla situazione che stanno esplorando. Il ruolo della dimostrazione è quello di precisare come le proprietà scoperte, formulate mediante le congetture prodotte, possano essere dedotte dagli assiomi della teoria considerata, in questo caso la geometria euclidea. Esempio di problema di esplorazione può essere il seguente: "Dato un quadrilatero ABCD, disegnare il quadrilatero LMNQ che ha come vertici i punti medi dei lati di ABCD. Determinare come varia il quadrilatero LMNQ al variare di ABCD e le loro possibili relazioni".

- Problema di modellizzazione: può essere il classico problema in cui si chiede di determinare il massimo o il minimo di una certa grandezza, oppure di studiare come varia una grandezza in funzione di un'altra. Anche qui, come nei precedenti tipi di problemi, occorre una rivisitazione del tipo di problema nella sua forma tradizionale, in quanto, anziché buttarsi sui conti, gli studenti possono visualizzare la situazione tramite una sua rappresentazione grafica, integrata magari da rappresentazioni numeriche (tabelle numeriche di dati), o simboliche (formule). Esempio di problema di modellizzazione verrà fornito nel prossimo paragrafo, sulle attività laboratoriali.

Chiaramente, un problema può avere diverse caratteristiche ed essere contemporaneamente di costruzione, di esplorazione e di modellizzazione, come quello che presenterò qui di seguito.

Nell'ambito di queste tipologie di problemi, le *affordances* elencate sopra possono essere validissimi strumenti di esplorazione, ricerca, congettura, argomentazione, finanche basi per costruire dimostrazioni.

Il *dragging* per esempio, può essere utilizzato in vari modi dagli studenti, a seconda del tipo di problema e dell'attività svolta nel problema (Arzarello et al., 1998; 2002):

- *Dragging* test: è la prova del trascinamento effettuata per vedere se la figura disegnata mantiene quelle proprietà geometriche che le si volevano attribuire;
- *Dragging* a caso: è il trascinamento a caso dei componenti della figura, per scoprire eventuali regolarità, invarianti, proprietà;
- *Dragging* guidato: consiste nel trascinare un punto per ottenere una configurazione particolare della figura (es. da un quadrilatero generico ottenere un parallelogrammo);
- *Dragging* lungo un luogo muto: consiste nel trascinare un punto della figura lungo una traiettoria privilegiata, costruita empiricamente mediante l'interazione percettiva tra figure sullo schermo e movimenti del mouse, in modo da conservare una certa proprietà o regolarità;
- *Dragging* legato: consiste nel trascinare un punto che è già vincolato a un oggetto.

Diverse modalità di *dragging* (quelle elencate non esauriscono sicuramente la casistica) sono utilizzate a seconda che uno studente non abbia ancora alcuna idea sul problema che sta affrontando (allora trascina a caso), oppure voglia ottenere una precisa figura da un'altra (allora trascina in modo guidato), o voglia muovere un punto su un oggetto (e quindi è un trascinamento legato), e così via. Quindi l'uso del tipo di *dragging* dà la possibilità al ricercatore o all'insegnante di osservare i processi di pensiero degli studenti e di seguire il loro approccio al problema, in un'ottica di attenzione verso non solo il prodotto finale dell'esercizio, ma anche e soprattutto di analisi dei processi cognitivi che portano a quel prodotto.

In analogia a quanto fatto per il *dragging*, la ricerca didattica si è interessata alla misura in un software di geometria dinamica, all'uso delle funzioni di luogo, traccia, animazione e così via. Riguardo alla misura, ci sono risultati analoghi a quelli del *dragging*, ovvero indagini sul tipo di uso della misura in problemi di esplorazione, per vedere se gioca a favore o contro la costruzione di pensiero teorico. La misura, come il *dragging*, può favorire il passaggio da un modo 'percettivo' di osservazione della figura, fondato sugli aspetti grafici e spaziali, a un modo più 'teorico' di osservazione, fondato sui teoremi della geometria (Laborde, 2004; Vadcard, 1999). Si possono anche classificare le modalità di uso della misura da parte degli studenti, a seconda che inducano ad esplorazioni per trovare congetture, oppure che conducano a verifiche di congetture, idee, tesi trovate. Avremo quindi alcuni dei principali modi di uso della misura:

- Misura usata come test su una figura, particolarmente utile per cercare invarianti;
- Misura usata in modo esplorativo, senza ancora avere idee su congetture;
- Misura guidata, ovvero usata come controllo per ottenere una certa configurazione, oppure una congettura già formulata (Olivero & Robutti, 2007).

Si riscontra, dalla ricerca, che se gli studenti non sono consapevoli dei risultati di misura in senso sperimentale, che ha come statuto epistemologico quello di numero soggetto a incertezza, con cifre significative determinate dal processo stesso, possono incorrere in errori grossolani, come per esempio abbandonare un percorso teorico di dimostrazione per seguire in modo incontrollabile i dati di misura del software, e finire quindi fuori strada.

Sia per il *dragging*, sia per la misura, è fondamentale la mediazione che offre l'insegnante, progettando attività sensate in un percorso graduato che conduca gli studenti da un approccio esplorativo alla costruzione di pensiero teorico, con obiettivo a medio-lungo termine di tipo dimostrativo.

4. Attività laboratoriali di matematica con GeoGebra: costruzione, esplorazione, modellizzazione

Presento qui un'attività realizzata con studenti della scuola secondaria di secondo grado, nell'ambito di un progetto europeo Comenius che coinvolge il Dipartimento di Matematica e il liceo scientifico Copernico di Torino (Edumatics, 2009).

Questa attività, centrata sulle figure e sulla possibilità di modellizzazione di una situazione geometrica, prevede l'utilizzo di GeoGebra e ha come prerequisiti le figure geometriche di base, il teorema di Pitagora, il concetto di distanza nel piano cartesiano e le definizioni delle grandezze trigonometriche seno e coseno. I nodi concettuali su cui si vuole lavorare sono: le variabili, le funzioni come modelli di situazioni geometriche e le loro rappresentazioni. Obiettivi dell'attività sono: analizzare una situazione geometrica e determinare la variabile dipendente e quella indipendente; determinare in una situazione geometrica una relazione tra la variabile dipendente e quella indipendente, attraverso proprietà e definizioni note; rappresentare la relazione tra variabile indipendente e dipendente con l'utilizzo di un software (GeoGebra); determinare una formula algebrica che rappresenti la relazione tra variabili, ovvero la funzione che rappresenta il modello; utilizzare il software per esplorare il modello della situazione geometrica; confrontare diversi modelli per la stessa situazione geometrica; generalizzare la situazione geometrica. L'attività è la seguente:

Problema (prima versione: caso del cerchio)

Mr. Bean percorre a velocità costante una circonferenza, di centro O e raggio r dati, partendo da un suo punto A.

Mr. Bean vuole descrivere come varia la sua distanza dal centro O della circonferenza. Come puoi aiutarlo? (Poiché centro e raggio della circonferenza sono dati, se lo desiderate, potete scegliere come centro O una qualunque posizione sul piano e come raggio r un qualunque numero reale positivo)

Problema (seconda versione: caso del quadrato)

Mr. Bean percorre a velocità costante il perimetro di un quadrato ABCD di centro O (punto di incontro delle diagonali) e lato L fissati, partendo dal suo vertice A.

Mr. Bean vuole descrivere come varia la sua distanza dal centro O del quadrato. Come puoi aiutarlo? (Se lo desiderate, potete scegliere un qualunque numero reale positivo come misura del lato del quadrato)

Problema (generalizzazione: altri poligoni)

Che cosa accadrebbe se, in un problema analogo, al posto di un quadrato avessi un rettangolo, o un esagono regolare? E poligoni regolari di numero di lati sempre maggiori? Come cambierebbe il grafico delle funzioni così ottenute? Giustificate le risposte.

L'attività propone alcune situazioni problematiche in un contesto geometrico, chiedendo di determinare un modello che consenta di descrivere la variazione della variabile dipendente. Non si danno suggerimenti sulla scelta della variabile indipendente, sicchè è possibile avere più modi risolutivi. Gli studenti sono invitati a osservare, riconoscere e descrivere le grandezze nella situazione geometrica, prima di fare ipotesi e calcoli. Il processo di modellizzazione avviene quindi in modo graduale e favorito dall'uso degli strumenti tecnologici, che può essere più o meno guidato dall'insegnante.

A partire dall'osservazione di una situazione in un caso particolare, quella del cerchio, in cui la grandezza dipendente (il raggio) è invariante al variare di quella indipendente (l'angolo o l'arco), gli studenti giungono ad analizzare una situazione più complessa come quella del quadrato. In essa, devono trovare un modello che descriva la variazione della distanza dal centro di un punto del perimetro, al variare di una grandezza scelta, che potrebbe essere l'angolo al centro o il cammino percorso sul perimetro.

Si presenta il problema alla classe e si chiede di pensare sulla situazione individualmente, prima di affrontarla in gruppo. L'attività è quella del cerchio, in cui la variabile è un invariante e il suo grafico è un segmento orizzontale. È importante per l'insegnante confrontare le soluzioni trovate dai gruppi, discuterle e metterle al vaglio attraverso una discussione nella classe.

Gli studenti possono usare un software come GeoGebra per rappresentare il modello.

La seconda attività è più impegnativa, in quanto la variabile dipendente non è fissa, ma varia tra due valori, un massimo e un minimo, mentre il punto percorre il perimetro del quadrato. Individuare quale variabile indipendente scegliere sarà una scelta del gruppo, così come scrivere la relazione che le lega e rappresentarla. L'insegnante seguirà il lavoro, dando i suggerimenti necessari nei punti cruciali. Nell'ultima parte del lavoro i ragazzi devono cercare di ricavare (sulla carta) l'equazione delle curve ottenute, partendo dal concetto di funzione nel piano cartesiano ed utilizzando i dati iniziali.

La proposta prevede momenti di lavoro individuale e di gruppo. I primi sono importanti per consentire a tutti gli studenti di avere il tempo di comprendere le richieste, di provare a rispondere e di riflettere autonomamente sulle risposte date. I secondi, invece, dovrebbero favorire attività di discussione e confronto e danno all'insegnante la possibilità di valutare le competenze argomentative degli studenti: sanno ascoltare le proposte dei compagni? Riescono a intervenire in modo pertinente? Si limitano a contrapporre posizioni o riescono a partire dalle proposte altrui ristrutturando le proprie al fine di rispondere in modo pertinente? Hanno la tendenza a convincere o anche a spiegare? Si tratta di informazioni importanti per valutare il processo formativo di uno studente.

Rappresentando in GeoGebra il problema del cerchio, si vede il punto B sulla circonferenza che rappresenta il punto variabile, in funzione dell'angolo al centro. Il modello della situazione geometrica sul piano cartesiano è un segmento. Infatti, essendo invariante la distanza del punto B dal centro, il grafico del modello sarà quello di una funzione costante.

Per il quadrato la situazione cambia decisamente: infatti, in questo caso, al variare del punto P sul perimetro della figura, la sua distanza dal centro non è più costante, ma varia in modo analogo sui quattro lati: parte da un valore massimo quando il punto P è in un estremo, quindi diminuisce fino al suo valore minimo quando P è nel punto medio, per poi aumentare di nuovo fino al precedente massimo, quando P è nell'altro estremo. La situazione si ripete uguale per i quattro lati. Il problema per gli studenti è capire questa variazione e come disegnarla. Infatti, a un primo approccio in genere gli studenti tendono a disegnare (prima di affrontare la situazione con il software) sulla carta una spezzata fatta di tratti che aumentano e che diminuiscono. Ovvero, gli studenti intuiscono che il valore della distanza dal centro varia e utilizzano la funzione lineare per rappresentare tale variazione. Quindi, con l'uso di GeoGebra, vedono che non si tratta di una funzione lineare, ma di una curva che si ripete uguale per ogni lato del quadrato e cercano di interpretare di quale variazione si tratti. Infatti, con il software è possibile non solo rappresentare il modello di tale variazione sul piano cartesiano, ma anche individuare la formula della curva che lo rappresenta, chiedendo se si tratta di una conica che passa per 5 punti di tale curva. GeoGebra fornisce infatti questa equazione.

Molto interessante è proprio tutta la discussione che si può scatenare attorno a questo modello e alla sua equazione. Infatti, gli studenti che hanno scelto una variabile indipendente (l'angolo al centro per esempio), si troveranno con un'equazione del modello (ellisse) diversa da quella (iperbole) degli studenti che hanno scelto un'altra variabile (il cammino percorso, per esempio). Pertanto il ruolo dell'insegnante in questa discussione può essere molto significativo, nel porre l'attenzione degli studenti sui risvolti teorici e simbolici della scelta, sull'opportunità di lavorare con una variabile piuttosto che un'altra, sulle approssimazioni del software che possono giocare un ruolo nella formulazione del modello, sulla compatibilità tra i risultati simbolici ottenuti nel software e quelli ottenuti in carta e matita. Tutta l'attività suddetta va nella direzione non solo di costruire significati per gli oggetti matematici, ma di formulare congetture, giustificarle, fare inferenze, calcoli, dimostrazioni. È quindi l'attività tipica del ricercatore in matematica, che, lavorando in gruppo, esplora una situazione per risolvere una problematica, sfruttando le conoscenze a disposizione e creandone nuove.

5. La formazione insegnanti

Attraverso le attività della Casa degli Insegnanti si intreccia la sperimentazione nelle scuole descritta sopra (gestita dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino e dal liceo Copernico di Torino), con la formazione dei docenti in presenza e a distanza. La modalità blended scelta per tale formazione consente un continuo confronto tra i formatori e i docenti e tra i docenti stessi, attraverso una serie di problemi affrontati insieme e discussi sia dal punto di vista contenutistico che metodologico-didattico.

I docenti coinvolti nei corsi possono ottenere una certificazione di Utente, Esperto o Formatore in GeoGebra. La caratteristica dei corsi consente di avere un profilo di docente in uscita che sia consapevole dell'uso del software per l'insegnamento della matematica, non solo come strumento tecnologico con caratteristiche specifiche di per sé, ma come un mediatore per la costruzione di significati matematici. I corsi sono dunque finalizzati a condividere materiali e attività, ma anche sicuramente metodologia, che va dall'introduzione di GeoGebra nella matematica all'utilizzo di un metodo laboratoriale, dalla gestione di lavori di gruppo alla conduzione di una discussione sui risultati, dalla progettazione di problemi all'osservazione dei processi degli studenti. Un docente che segue questo percorso formativo è un docente disponibile a mettersi in gioco e a considerare fondamentale un cambiamento della sua attività didattica nella scuola del terzo millennio, una scuola inserita in una società che richiede sempre più competenze non routinarie, ma cognitive, analitiche, interattive, secondo quanto indicato dai test internazionali OCSE-PISA.

6. Bibliografia

Arzarello F., Gallino G., Micheletti C., Olivero F., Paola D. & Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In: *Proceedings of PME XXII*, Stellenbosch, vol. 2, p. 32-39.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 34(3); 66-72.

EdUmatics (2009). European Development for the Use of Mathematics Technology in Classrooms, 503254-LLP-1-2009-1-UK-COMENIUS-CMP. Application form.

Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts, *Educational studies in mathematics*, 24,139-162.

Hegedus, S.J., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 41 (4), 399-412.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135-146.

Kaput, J. & Roschelle, J. (1997). Deepening the impact of technology beyond assistance with traditional formalism in order to democratize access to ideas underlying calculus. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of PME*, Lahti, Finland. Vol. 1, 105-113.

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-21.

Laborde, C., Hollebrands, K., Kynigos, C., Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.) *Handbook on Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 275-304.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Noss, R., Healy, L., Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), 203-233.

Olivero, F. & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. Internat*ional Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. Volume 12, Number 2; p. 135-156.

Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2001). Approaching theoretical thinking within a dynamic geometry environment. *L'educazione matematica*, 3(3), 127-148.

Vadcard, L. (1999). La validation en géométrie au Collège avec Cabri-Géomètre: mesures exploratoire et mesures probatoires. *Petit X*(50), 5-21.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*, Cambridge: Cambridge University Press.